

ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТЕ-ВОЛН НА НЕЛИНЕЙНОМ СЛОЕ¹

Аннотация. Рассмотрена краевая задача дифракции электромагнитной ТЕ-волны на нелинейном слое с нелинейностью, выраженной законом Керра; формулируется и реализуется численный метод рассматриваемой задачи. Представлены результаты расчетов.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, задача дифракции, электромагнитные ТЕ-волны, керровская нелинейность.

Abstract. The article considers a boundary diffraction problem of a TE wave on a nonlinear layer. The nonlinearity in the layer is described by Kerr law. A numerical method to solve the problem is suggested and proved. Results of numerical calculations are given.

Key words: Maxwell's equations, diffraction problem, TE waves, Kerr nonlinearity.

1. Постановка задачи

Рассмотрим электромагнитные волны, распространяющиеся через однородный, изотропный, немагнитный диэлектрический слой, расположенный между двумя полупространствами $x < 0$ и $x > h$ в декартовой системе координат $Oxyz$. Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянную диэлектрическую проницаемость $\epsilon_1 \geq \epsilon_0$, $\epsilon_3 \geq \epsilon_0$ соответственно, где ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума. Вообще говоря, условия $\epsilon_1 \geq \epsilon_0$, $\epsilon_3 \geq \epsilon_0$ необязательны, можно считать, что ϵ_1 , ϵ_3 произвольные вещественные числа. Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$ – магнитная проницаемость вакуума.

Считаем поля гармонически зависящими от времени [1]:

$$\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, t) = \mathbf{E}_+(x, y, z) \cos \omega t + \mathbf{E}_-(x, y, z) \sin \omega t ;$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(x, y, z, t) = \mathbf{H}_+(x, y, z) \cos \omega t + \mathbf{H}_-(x, y, z) \sin \omega t ,$$

где ω – круговая частота; $\tilde{\mathbf{E}}$, $\mathbf{E}_+$, $\mathbf{E}_-$, $\tilde{\mathbf{H}}$, $\mathbf{H}_+$, $\mathbf{H}_-$ – вещественные искомые функции.

Образуем комплексные амплитуды полей $\mathbf{E}(x, y, z)$ и $\mathbf{H}(x, y, z)$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + i\mathbf{E}_-, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_+ + i\mathbf{H}_-,$$

где $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)^T$, $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)^T$; знак $(\cdot)^T$ обозначает операцию транспонирования;

$$E_x = E_x(x, y, z), \quad E_y = E_y(x, y, z), \quad E_z = E_z(x, y, z),$$

¹ Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., соглашения № 14.B37.21.1950, 14.A18.21.2054, 8860.

$$H_x = H_x(x, y, z), H_y = H_y(x, y, z), H_z = H_z(x, y, z).$$

Ниже множители $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ будем опускать.

Электромагнитное поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -i\omega \epsilon \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i\omega \mu \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (1)$$

условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границе раздела сред $x=0$, $x=h$ и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле экспоненциально затухает при $|x| \rightarrow \infty$ в областях $x < 0$ и $x > h$. Диэлектрическая проницаемость внутри слоя описывается законом Керра [2]

$$\epsilon = \epsilon_2 + \alpha |\mathbf{E}|^2,$$

где ϵ_2 – постоянная составляющая диэлектрической проницаемости в слое; α – коэффициент нелинейности.

Будем искать решение уравнений Максвелла во всем пространстве.

На рис. 1 схематически представлена геометрия задачи.

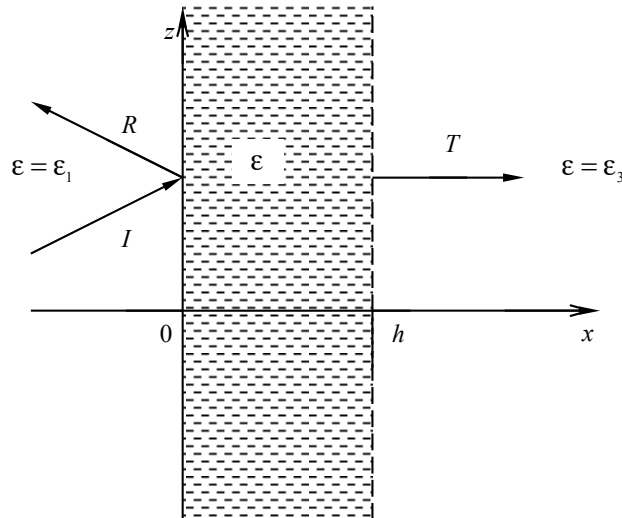


Рис. 1. Геометрия задачи

Коэффициент I (падающая волна) считается известным, а коэффициенты R (отраженная волна) и T (преломленная волна) подлежат определению (см. рис. 1).

2. ТЕ-волны

Рассмотрим ТЕ-поляризованные электромагнитные волны

$$\mathbf{E} = (0, E_y, 0)^T, \mathbf{H} = (H_x, 0, H_z)^T,$$

где $E_x = E_x(x, y, z)$, $E_z = E_z(x, y, z)$, $H_y = H_y(x, y, z)$.

Можно показать, что компоненты полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ не зависят от y [3]. Волны, распространяющиеся вдоль границы z раздела сред, гармонически зависят от z . Значит, компоненты полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ имеют представление

$$E_y = E_y(x)e^{i\gamma z}, \quad H_x = H_x(x)e^{i\gamma z}, \quad H_z = H_z(x)e^{i\gamma z}, \quad (2)$$

где значение γ считается известным.

Подставив (2) в (1), получим

$$\begin{cases} i\gamma H_x(x) - H'_z(x) = -i\omega\epsilon E_y(x), \\ -i\gamma E_y(x) = i\omega\mu H_x(x), \\ E'_y(x) = i\omega\mu H_z(x). \end{cases}$$

После простейших преобразований из последней системы получаем

$$\gamma^2 E_y(x) - E''_y(x) = \omega^2 \mu \epsilon E_y(x).$$

Пусть $k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$, выполним нормировку в соответствии с формулами $\tilde{x} = kx, \frac{d}{dx} = k \frac{d}{d\tilde{x}}, \tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{k}, \tilde{\epsilon}_j = \frac{\epsilon_j}{\epsilon_0}$ ($j=1,2,3$). Обозначим $Y(\tilde{x}) := E_y(x)$. Опустив значок тильды, получаем

$$Y''(x) = -(\epsilon - \gamma^2)Y(x), \quad (3)$$

где

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_1, & x < 0, \\ \epsilon_2 + \alpha Y^2, & 0 < x < h, \\ \epsilon_3, & x > h. \end{cases}$$

3. Решение дифференциальных уравнений в полупространствах

При $x < 0$ имеем $\epsilon = \epsilon_1$. Из (3) получаем уравнение

$$Y'' = (\gamma^2 - \epsilon_1)Y,$$

его общее решение

$$Y(x) = C_1 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \epsilon_1}x} + C_2 e^{\sqrt{\gamma^2 - \epsilon_1}x}.$$

Пусть $k_1^2 = \gamma^2 - \epsilon_1$, также обозначим $C_1 := R$, $C_2 := I$. Тогда

$$Y(x) = R e^{-k_1 x} + I e^{k_1 x}. \quad (4)$$

Причем величина I является известной, а величина R – неизвестна и подлежит определению.

Здесь мы считаем $\gamma^2 - \varepsilon_1 > 0$, ибо в противном случае мы получим общее решение, выраженное через синусы и косинусы действительного аргумента, и, таким образом, не сможем удовлетворить условию излучения на бесконечности.

При $x > h$ имеем $\varepsilon = \varepsilon_3$. Из (3) получаем уравнение

$$Y'' = (\gamma^2 - \varepsilon_3)Y,$$

его общее решение имеет вид

$$Y(x) = C_3 e^{-(x-h)\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}} + C_4 e^{(x-h)\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}.$$

В силу условия на бесконечности $C_4 = 0$. Пусть $k_3^2 = \gamma^2 - \varepsilon_3$, также обозначим $C_3 := T$, тогда

$$Y(x) = T e^{-(x-h)k_1}, \quad (5)$$

величина T неизвестна и подлежит определению.

Здесь по тем же причинам, что и при $x < 0$, мы считаем $\gamma^2 - \varepsilon_3 > 0$.

Из формул (4), (5) следует неравенство $\gamma^2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$.

Внутри слоя получаем уравнение

$$Y''(x) = -(\varepsilon_2 - \gamma^2 - \alpha Y^2(x))Y(x). \quad (6)$$

4. Условия сопряжения и формулировка задачи

Как известно [4, 5], касательные составляющие электромагнитного поля непрерывны на границе раздела сред.

В рассматриваемом случае касательными составляющими являются компоненты E_y и H_z . Но $\frac{\partial E_y}{\partial x} = i\omega\mu H_z$, следовательно, непрерывной является также и $\frac{\partial E_y}{\partial x}$.

Из непрерывности касательных составляющих компонент поля следуют условия сопряжения для функций Y и Y' :

$$\begin{aligned} [Y]_{x=0} &= 0, [Y]_{x=h} = 0, \\ [Y']_{x=0} &= 0, [Y']_{x=h} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $[f]_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ обозначает скачок функции в точке $x = x_0$.

Тогда получаем

$$Y(0-0) = R + I, Y(h+0) = T,$$

$$Y'(0-0) = (-R+I)k_1, \quad Y'(h+0) = -Tk_3. \quad (8)$$

Теперь мы можем сформулировать краевую задачу (задача P_{NL}): найти значения коэффициентов R и T и решение $Y(x)$ уравнения (6) такое, чтобы выполнялись условия (7), причем в полупространствах $x < 0$ и $x > h$ функция $Y(x)$ описывается формулами (4), (5).

5. Линейная задача

Из уравнения (6) при $\alpha = 0$ получаем линейное дифференциальное уравнение

$$Y'' = -k_2^2 Y, \quad (9)$$

где $k_2^2 = \varepsilon_2 - \gamma^2 \geq 0$.

Общим решением уравнения (9) является

$$Y = C_1 \cos k_2 x + C_2 \sin k_2 x.$$

Полагая $x = 0$, из условий сопряжения (7) и формул (8) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} R + I = C_1, \\ k_1(-R + I) = k_2 C_2, \end{cases} \quad (10)$$

откуда, выражая C_2 , получаем

$$C_2 = k_1 k_2^{-1} (-R + I).$$

При $x = h$ из условий сопряжения (7) и формул (8) получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} T = C_1 \cos k_2 h + C_2 \sin k_2 h, \\ -k_3 T = -k_2 C_1 \sin k_2 h + k_2 C_2 \cos k_2 h. \end{cases} \quad (11)$$

Подставляя в систему (11) значения C_1 и C_2 , найденные из (10), получаем

$$\begin{cases} T = (R + I) \cos k_2 h + k_1 k_2^{-1} (-R + I) \sin k_2 h, \\ -k_3 T = -k_2 (R + I) \sin k_2 h + k_1 (-R + I) \cos k_2 h. \end{cases} \quad (12)$$

Преобразуем систему (12) к виду

$$\begin{cases} T = R(\cos k_2 h - k_1 k_2^{-1} \sin k_2 h) + I(\cos k_2 h + k_1 k_2^{-1} \sin k_2 h), \\ k_3 T = R(k_2 \sin k_2 h + k_1 \cos k_2 h) - I(k_1 \cos k_2 h - k_2 \sin k_2 h). \end{cases} \quad (13)$$

Поделив в (13) одно уравнение на другое, получим

$$k_3 R(\cos k_2 h - k_1 k_2^{-1} \sin k_2 h) + k_3 I(\cos k_2 h + k_1 k_2^{-1} \sin k_2 h) =$$

$$= R(k_2 \sin k_2 h + k_1 \cos k_2 h) - I(k_1 \cos k_2 h - k_2 \sin k_2 h).$$

Из последнего уравнения находим

$$R = -I \frac{(k_2^2 - k_1 k_3) \sin k_2 h - k_2 (k_1 + k_3) \cos k_2 h}{(k_2^2 + k_1 k_3) \sin k_2 h - k_2 (k_3 - k_1) \cos k_2 h}. \quad (14)$$

Теперь, зная R , из первого уравнения системы (12) получаем

$$T = (R + I) \cos k_2 h + k_1 k_2^{-1} (-R + I) \sin k_2 h, \quad (15)$$

или

$$T = I \left[-\frac{(k_2^2 - k_1 k_3) \sin k_2 h - k_2 (k_1 + k_3) \cos k_2 h}{(k_2^2 + k_1 k_3) \sin k_2 h - k_2 (k_3 - k_1) \cos k_2 h} + 1 \right] \cos k_2 h + \\ + \frac{k_1}{k_2} I \left[\frac{(k_2^2 - k_1 k_3) \sin k_2 h - k_2 (k_1 + k_3) \cos k_2 h}{(k_2^2 + k_1 k_3) \sin k_2 h - k_2 (k_3 - k_1) \cos k_2 h} + 1 \right] \sin k_2 h.$$

Последнее уравнение можно записать так:

$$T = \frac{2k_1 k_2 I}{(k_2^2 + k_1 k_3) \sin k_2 h - k_2 (k_3 - k_1) \cos k_2 h}.$$

Тогда для C_1 и C_2 получаем

$$C_1 = 2I \frac{k_1 (k_3 \sin k_2 h + k_2 \cos k_2 h)}{(k_2^2 + k_1 k_3) \sin k_2 h - k_2 (k_3 - k_1) \cos k_2 h}; \\ C_2 = \frac{2Ik_1 (k_2 \sin k_2 h - k_3 \cos k_2 h)}{(k_2^2 + k_1 k_3) \sin k_2 h - k_2 (k_3 - k_1) \cos k_2 h}.$$

Таким образом, решение линейной задачи имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} R = -I \frac{(k_2^2 - k_1 k_3) \sin k_2 h - k_2 (k_1 + k_3) \cos k_2 h}{(k_2^2 + k_1 k_3) \sin k_2 h - k_2 (k_3 - k_1) \cos k_2 h}, \\ T = \frac{2k_1 k_2 I}{(k_2^2 + k_1 k_3) \sin k_2 h - k_2 (k_3 - k_1) \cos k_2 h}, \\ Y(x) = \frac{2Ik_1 ((k_3 \sin k_2 h + k_2 \cos k_2 h) \cos k_2 x + (k_2 \sin k_2 h - k_3 \cos k_2 h) \sin k_2 x)}{(k_2^2 + k_1 k_3) \sin k_2 h - k_2 (k_3 - k_1) \cos k_2 h}. \end{array} \right.$$

Формулы (14) и (15) будут использованы для получения численных результатов. Также на основе точного решения линейной задачи будет проведено тестирование численного метода решения линейной и нелинейной задач.

Заметим, что формулы (14) и (15) могут быть получены иначе (и будут иметь другой вид!). А именно уравнение (9) имеет первый интеграл: $Y'^2 = -k_2^2 Y^2 + c_1$, где c_1 – постоянная интегрирования. Используя условия сопряжения (7) и выражения (8), из первого интеграла получаем

$$(R - I)^2 k_1^2 - T^2 k_3^2 = k_2^2 (T^2 - (R + I)^2).$$

Последнее соотношение можно использовать для нахождения R или T .

Таким образом, задача (линейная) в слое с постоянной диэлектрической проницаемостью решена точно.

6. Нелинейная задача

Рассмотрим нелинейную задачу. А именно, считая, что диэлектрическая проницаемость в слое выражается законом Керра: $\varepsilon = \varepsilon_2 + \alpha Y^2$, получаем уравнение (6).

Несмотря на то, что уравнение (6) может быть решено в квадратурах (более точно: решение уравнения (6) выражается через эллиптические функции), мы не будем обращаться к точному решению. Во-первых, потому что анализ точного решения рассматриваемой задачи достаточно труден, а во-вторых, в случае более сложной нелинейности решение вообще может не выражаться через известные функции, а будет представимо интегралом (анализ такого выражения может оказаться весьма сложным). Точному решению через эллиптические функции рассматриваемой задачи посвящена работа [6]. Там же можно найти полезные обсуждения результатов.

Перейдем от решения нелинейной задачи сопряжения к решению некоторой вспомогательной задачи Коши. А именно, будем считать, что R задано, тогда из (8) для уравнения (6) имеем начальные условия

$$\begin{cases} Y(0+0) = R + I, \\ Y'(0+0) = k_1(R - I). \end{cases} \quad (16)$$

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (6) с начальными условиями (16). Решая задачу Коши, мы находим $Y(h-0)$, тогда пусть $T := Y(h-0)$. Далее построим функцию

$$F(R) := Y'(h-0) - Y'(h+0). \quad (17)$$

Поскольку $Y'(h+0) = -k_3 T$, а $T := Y(h-0)$, то для (17) получаем

$$F(R) = Y'(h-0) + k_3 Y(h-0). \quad (18)$$

Мы видим, что правая часть (18) выражается только через решения задачи Коши. Тогда ясно, что если $R = \tilde{R}$ таково, что $F(\tilde{R}) = 0$, то $\tilde{R}$ и $\tilde{T} := Y(h - 0, \tilde{R})$ являются искомыми коэффициентами, а решение $Y(x, \tilde{R})$ задачи Коши для уравнения (6) с начальными условиями $Y(0 + 0, \tilde{R}) = \tilde{R} + I$, $Y'(0 + 0, \tilde{R}) = k_1(\tilde{R} - I)$ является искомым решением нелинейной задачи.

На основе полученных результатов сформулируем следующее

Утверждение. Пусть отрезок $[\underline{R}, \bar{R}] \subset [R_*, R^*]$ таков, что $F(\underline{R})F(\bar{R}) < 0$, тогда существует по крайней мере одно $\tilde{R} \in (\underline{R}, \bar{R})$ такое, что $\tilde{R}$, $\tilde{T} := Y(h - 0, \tilde{R})$ являются искомыми коэффициентами, а решение $Y(x, \tilde{R})$ задачи Коши для уравнения (6) с начальными условиями $Y(0 + 0, \tilde{R}) = \tilde{R} + I$, $Y'(0 + 0, \tilde{R}) = k_1(\tilde{R} - I)$, – искомым решением нелинейной задачи.

На основе этого утверждения можно построить численный метод для решения задачи P_{NL} . Для этого достаточно выбрать отрезок $[R_*, R^*]$, разделив его $(n + 1)$ узлами, получим сетку $\{R_i\}$, $i = \overline{0, n}$, где $R_0 = R_*$, $R_n = R^*$. Для каждого индекса i получим начальные значения:

$$\begin{cases} Y(0 + 0) = R_i + I, \\ Y'(0 + 0) = k_1(R_i - I). \end{cases}$$

Решая задачу Коши для каждого i и вычисляя $F(R_i)$, можно найти такие R_j и R_{j+1} , что $F(R_j)F(R_{j+1}) < 0$ (если таковые R_j и R_{j+1} существуют). Если отрезок $[R_j, R_{j+1}]$ найден, то дальнейшее уточнение искомого $\tilde{R}_i$ может быть найдено, например, методом дихотомии.

Отметим, что использованный нами подход для решения краевой задачи на основе решения вспомогательной задачи Коши широко известен (см., например, [7]). Этот метод может быть использован в том числе и для численного решения нелинейных задач сопряжения на собственные значения, описывающих распространение собственных волн в нелинейных однослойных и многослойных слоистых волноводах (см., например, [8–10]).

7. Численные результаты

На рис. 2–7 представлены зависимости значений коэффициентов R и T как от параметра α , так и от параметра I .

Выбирая определенные значения γ^2 , h , ε_1 , ε_2 , ε_3 , решаем описанную выше краевую задачу описанным выше способом. Прделав эту операцию для нескольких значений I , мы можем построить график зависимости $R = R(I)$. Если соединить точки, получим линии.

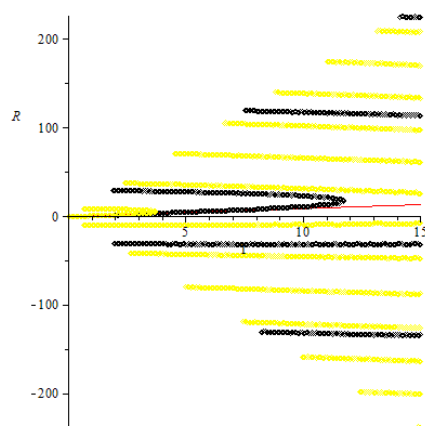


Рис. 2. Графики зависимости коэффициента R от I при различных значениях коэффициента нелинейности. Использованы следующие значения параметров:

$$\gamma^2 = 2,8, \epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 9, \epsilon_3 = 2, h = 1, \alpha = 0,001$$

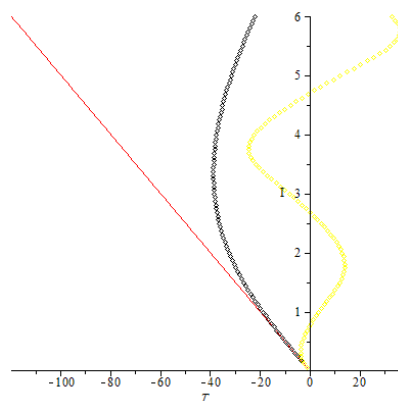


Рис. 3. Графики зависимости коэффициента T от I при различных значениях коэффициента нелинейности. Использованы следующие значения параметров:

$$\gamma^2 = 2,8, \epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 9, \epsilon_3 = 2, h = 1, \alpha = 0, \alpha = 0,001, \alpha = 0,1$$

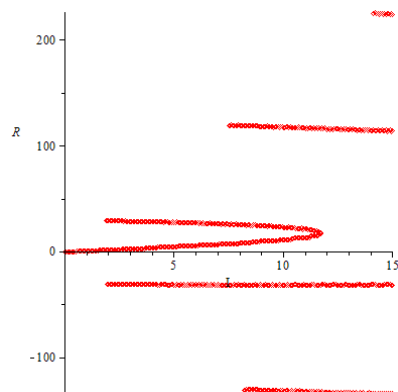


Рис. 4. График зависимости коэффициента R от I . Использованы следующие значения параметров: $\gamma^2 = 2,8, \epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 9, \epsilon_3 = 2, h = 1, \alpha = 0,001$

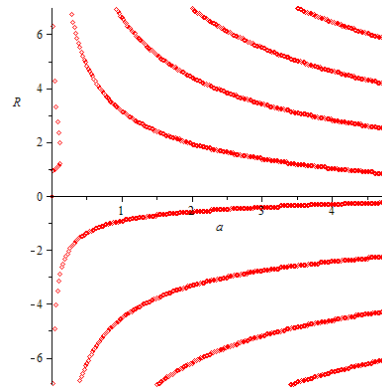


Рис. 5. График зависимости коэффициента R от значения коэффициента нелинейности α . Используются следующие значения параметров:

$$\gamma^2 = 2,8, \epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 9, \epsilon_3 = 2, h = 1, I = 1$$

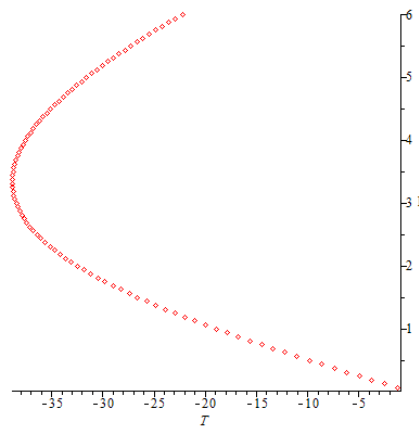


Рис. 6. График зависимости коэффициента T от I . Используются следующие значения параметров: $\gamma^2 = 2,8, \epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 9, \epsilon_3 = 2, h = 1, \alpha = 0,001$

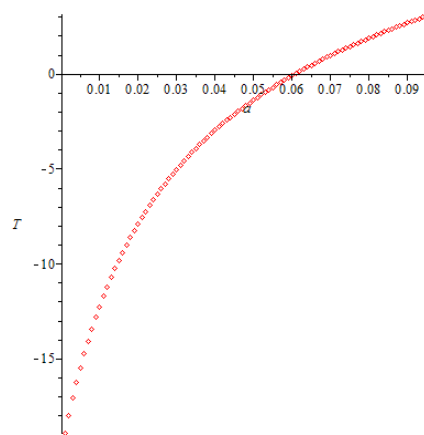


Рис. 7. График зависимости коэффициента T от значения коэффициента нелинейности α . Используются следующие значения параметров:

$$\gamma^2 = 2,8, \epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 9, \epsilon_3 = 2, h = 1, I = 1$$

Список литературы

1. **Eleonskii, V. M.** Cylindrical Nonlinear Waveguides / V. M. Eleonskii, L. G. Oganes'yants, V. P. Silin // Soviet physics JETP. – 1972. – V. 35, № 1. – P. 44–47.
2. **Ахмедиев, Н. Н.** Солитоны. Нелинейные импульсы и пучки / Н. Н. Ахмедиев, А. Анкевич. – М. : Физматлит, 2003. – 304 с.
3. **Smirnov, Yu. G.** Electromagnetic wave propagation in nonlinear layered waveguide structures / Yu. G. Smirnov, D. V. Valovik. – Penza : PSU Press, 2011. – 248 с.
4. **Стрэттон, Дж. А.** Теория электромагнетизма / Дж. А. Стрэттон. – М. ; Л. : ОГИЗ, 1948. – 540 с.
5. **Вайнштейн, Л. А.** Электромагнитные волны / Л. А. Вайнштейн. – М. : Радио и связь, 1988. – 440 с.
6. **Schürmann, H.-W.** Reflection and transmission of a plane TE-wave at a lossless nonlinear dielectric film / H.-W. Schürmann, V. S. Serov, Yu. V. Shestopalov // Physica D. 2001. – № 158. – P. 197–215.
7. **Волков, Е. А.** Об исследовании и решении разностным методом нелинейных задач для обыкновенного дифференциального уравнения / Е. А. Волков // Труды МИАН СССР. – 1976. – Т. 140. – С. 103–129.
8. **Валовик, Д. В.** О методе задачи Коши решения нелинейной краевой задачи на собственные значения для электромагнитных ТМ-волн, распространяющихся в слое с керровской нелинейностью / Д. В. Валовик, Е. В. Зарембо // Радиотехника и электроника. – 2013. – Т. 58 (принята к печати).
9. **Валовик, Д. В.** Численное решение задачи о распространении электромагнитных ТМ-волн в круглом диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной средой / Д. В. Валовик, Е. Ю. Смолькин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 3. – С. 29–37.
10. **Valovik, D. V.** Electromagnetic TM wave propagation in nonlinear multilayered waveguides. Numerical technique to obtain propagation constants / D. V. Valovik, E. V. Zarembo // International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory 2012, Proceedings. – Kharkiv, 2012. – P. 105–108.

Валовик Дмитрий Викторович

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет

E-mail: dvalovik@mail.ru

Valovik Dmitry Victorovich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University

Эргашева Екатерина Рифкатовна

студентка, Пензенский
государственный университет

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Ergasheva Ekaterina Rifkatovna

Student, Penza State University

УДК 517.927, 519.624

Валовик, Д. В.

Задача дифракции электромагнитных ТЕ-волн на нелинейном слое /
Д. В. Валовик, Е. Р. Эргашева // Известия высших учебных заведений.
Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 4 (24). –
С. 73–83.